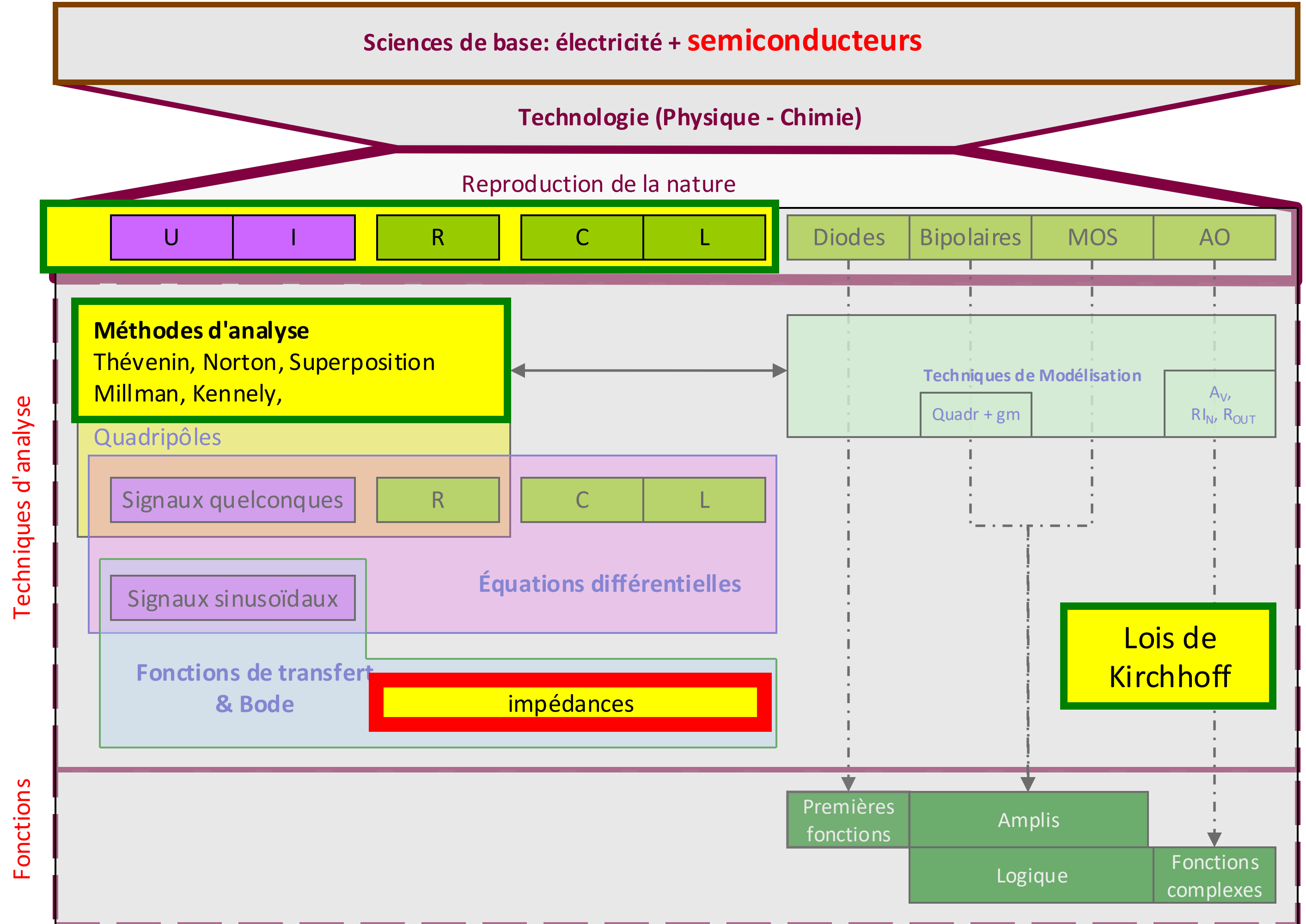
Relations entre les différentes notions



Analyses avec circuits RC

- Méthodes précédentes utilisables avec capacités et inductances???
  - Rappels : Capacité et inductance
  - Analyses de circuit avec un seul type de composant : Facile !!!
  - Analyses de circuit avec une combinaison de composants : Plus délicat !!!

- Analyse **temporelle** pour circuits RC (idem RL, et RLC)
  - Équation différentielle simple pour signaux carrés (semaine 8)
  - Équation différentielle complexe pour signaux sinusoïdaux

- Analyse **fréquentielle** pour circuits RC (idem RL, et RLC)
  - Exploitation des nombres complexes → Rappels essentiels
  - Notion d’impédance complexe
  - Analyse comparable avec études des semaines passées

Rappels composants R, C, L

1) Circuit avec résistances uniquement

$$\boxed{U = R.I}$$

- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles <–> triangles s'appliquent facilement

2) Circuit avec condensateurs uniquement

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt}\ (\mathrm{a}) = \frac{Cdu}{dt}\ (b)}$$

- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles <–> triangles s'appliquent aussi

3) Circuit avec inductances uniquement

$$\boxed{u(t) = \frac{Ldi}{dt}}$$

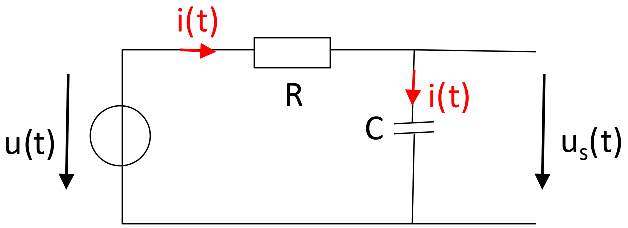
- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles <–> triangles s'appliquent aussi

Facile

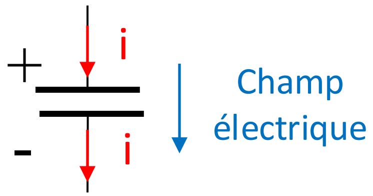
4) Combinaisons : on se limitera aux combinaisons **R et C**

- Plus délicat car on travaille sur des **équations différentielles**

Circuit de base et analyse temporelle



On extrait des électrons



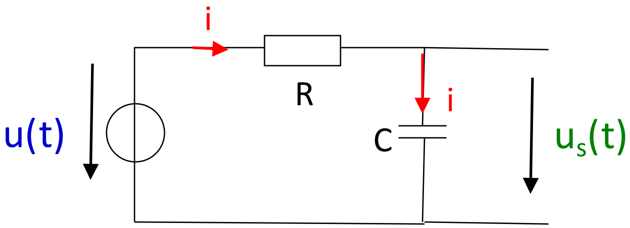
On injecte des électrons

$$i(t) = \frac{u(t) - u_S(t)}{R} = C\frac{du_S}{dt} \quad \text{ou encore} \quad u(t) = u_S(t) + RC\frac{du_S}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre :

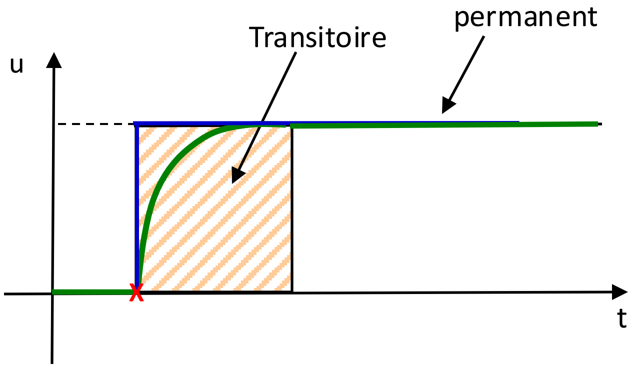
- Avec des *sin* l'analyse exploitera une méthode plus simple avec les « complexes »
- Analyse temporelle substituée par une **analyse fréquentielle**

Exemples de signaux [1]

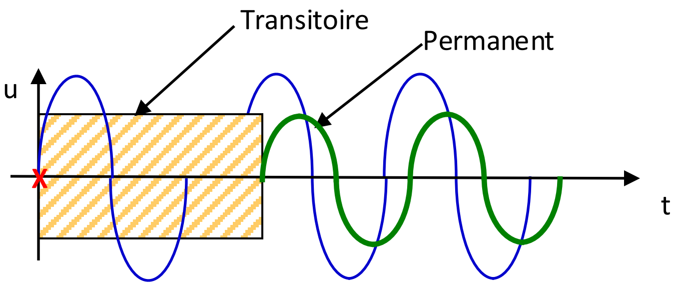


L'équation différentielle est posée de la même façon pour les deux cas, seule l'excitation change

Saut indiciel :
exemple de variations brutales d'une horloge



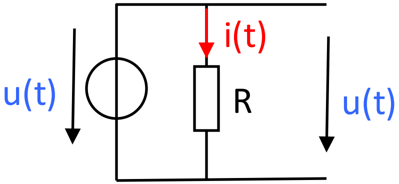
Signal sinusoïdal :



Dans les deux cas, nous supposons la **capacité déchargée** au départ ($u_s(0) = 0$)

Au bout d'un « certain » temps, la sortie atteint son régime permanent

Avec résistance, pas de déphasage entre u et i pour un *sin*



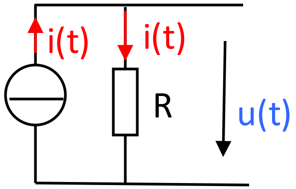
$u(t) = \ U_0.\sin(\omega t)$

$\mathbf{i}(\boldsymbol{t}) = \dfrac{\mathbf{u}(\mathbf{t})}{\boldsymbol{R}} = \dfrac{\mathrm{U_0.\sin(\omega t)}}{\mathrm{R}}$

$\mathrm{i(t) = I_0.\sin(\omega t)}$

$\mathrm{Avec\ I_0} = \dfrac{\mathrm{U_0}}{\mathrm{R}}$

sin(ωt) pour u et i qui sont en phase



$i(t) = \ I_0.\sin(\omega t)$

$\mathbf{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = R.\mathrm{I_0}.\sin(\omega t)$

$\mathrm{u(t)} = U_0.\sin(\omega t)$

$Avec\ U_0 \ = R.\mathrm{I_0}$

À nouveau sin(ωt) pour u et i qui sont en phase

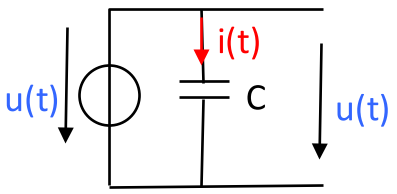
Remarque:

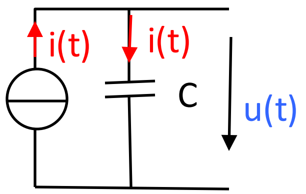
- **I_0** et **U_0** sont des amplitudes
- Parfois on les note $\widehat{I_0}$ et $\widehat{U_0}$
- On utilise aussi très souvent la valeur efficace notée I ou I_{EFF} et U ou U_{EFF} qui sera exploitée dans le calcul des puissances

Conséquence:

Conclusion : Avec R, courant et tension sont en phase

Avec condensateur, déphasage entre u et i pour un *sin*





Un peu plus complexe avec i(t)

$$u(t) = U_0.\sin(\omega t)$$

$$\mathbf{i(t) = C\frac{du(t)}{dt}} = C\omega U_0.\cos(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega U_0.\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Entre u et i, il y a un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$,

i(t) qui est en avance sur u(t)

$$i(t) = I_0.\sin(\omega t) \;\; or\; i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

On cherche u(t) $\Rightarrow \mathbf{du} = \frac{\mathbf{i(t).dt}}{\mathbf{C}}$

$$finalement \int du = u(t) = \int \frac{i(t).dt}{C} = \int \frac{\mathbf{I_0}.\sin(\omega t).dt}{\mathbf{C}}$$

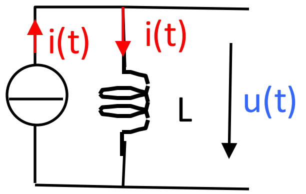
constantes

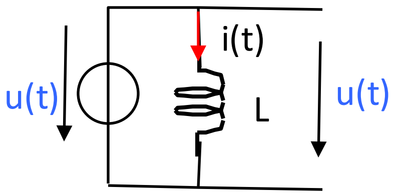
$$u(t) = \frac{-I_0\cos(\omega t)}{\omega C} = \frac{-I_0\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\omega C} = \frac{I_0\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega C}$$

Le même déphasage de $+\frac{\pi}{2}$

Conclusion : Déphasage constant de $\frac{\pi}{2}$ entre courant et tension

Avec inductance, déphasage entre u et i pour un *sin*





plus complexe avec u(t)

$$i(t) = I_0.\sin(\omega t)$$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{L}\frac{\mathbf{di(t)}}{\boldsymbol{dt}} = \mathrm{L\omega I_0.\cos(\omega t)}$$

$$\mathrm{u(t)} = \mathrm{L\omega I_0.\sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Entre u et i, il y a un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ et cette fois c'est u(t) qui est en avance sur i(t)

$$u(t) = U_0.\sin(\omega t), \text{or } \mathrm{u(t)} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{di(t)}}{\mathrm{dt}} \Rightarrow \mathbf{di} = \frac{\mathbf{u}(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{L}}$$

$$finalement \int \mathrm{di} = \mathrm{i(t)} = \int \frac{\mathrm{u(t).dt}}{\mathrm{L}} = \int \frac{\mathbf{U_0}.\sin(\omega t).\mathrm{dt}}{\mathbf{L}}$$

$$\mathrm{i(t)} = \frac{-\mathrm{U_0}\cos(\omega t)}{\omega L} = \frac{-\mathrm{U_0}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\omega L} = \frac{\mathrm{U_0}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega L}$$

On a encore un déphasage entre u et i de $+\frac{\pi}{2}$ en faveur de u(t)

Conclusion : Déphasage constant de $\frac{\pi}{2}$ entre courant et tension

Commentaires

Constat:

- Avec le condensateur on observe un déphasage constant de $\pi/2$ entre i(t) et $u_s(t)$: i(t) est en avance
- Avec l'inductance on observe un déphasage constant de $\pi/2$ entre i(t) et $u_s(t)$: u(t) est en avance

Tension aux bornes de R de la forme: $U = R.I$

Tension aux bornes de C : $\mathrm{u(t)} = \frac{\mathrm{I_0 sin}(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega C}$ de la forme $U = \frac{1}{\omega.C}.I_2$ (I_2 différent du courant I)

Tension aux bornes de L : $\mathrm{u(t)} = L\omega I_0.\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ de la forme $U = \omega.L.I_2$ (I_2 différent du courant I)

$\frac{1}{\omega.C}$ comparable à une résistance qui **diminue** avec la fréquence

$\omega.L$ comparable à une résistance qui **augmente** avec la fréquence

Objectif: Proposer un outil mathématique permettant :

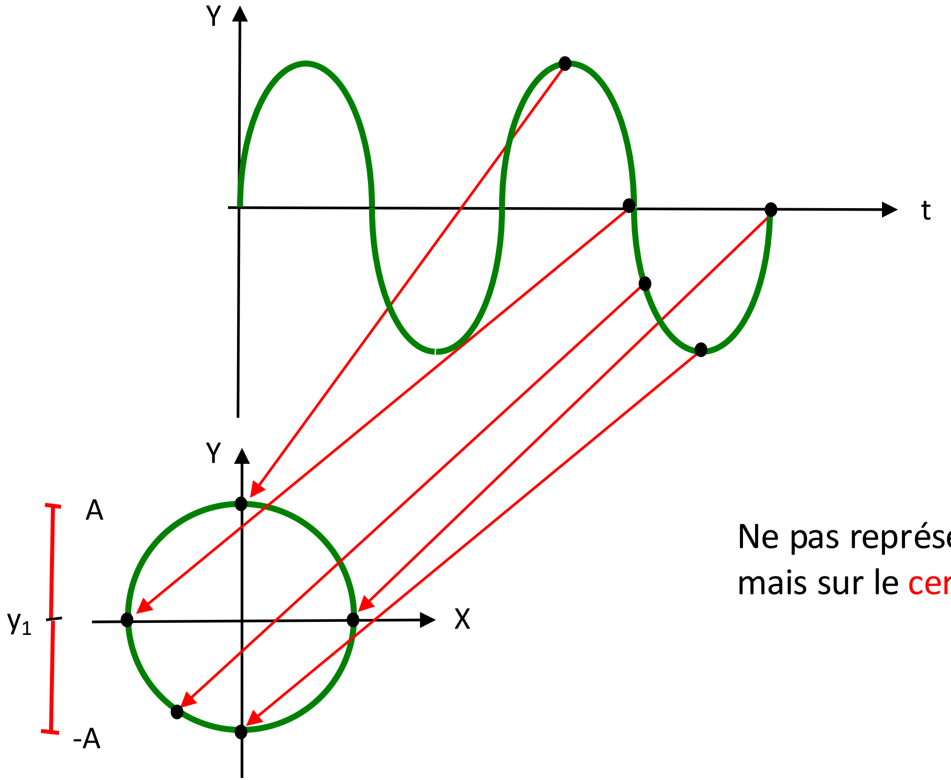
- D'absorber le problème du déphasage :

$$\mathrm{A}\sin(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \mathrm{A}\sin(\omega t) + X\sin(\omega t) = (A+X)\sin(\omega t)$$

- D'assimiler la capacité (idem inductance) à une résistance **variable** → Impédance,
- Reproduire le déphasage en temps utile,
- Représentation aisée quelle que soit la fréquence → Diagramme de Bode

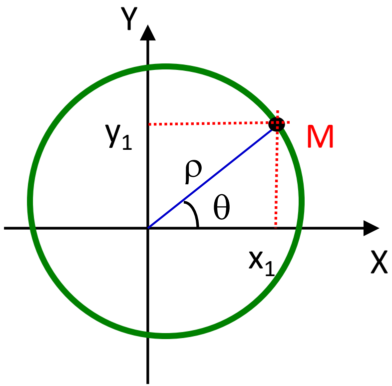
Mode de représentation du sin avec cercle trigonométrique

Fonction de base: $y(t) = A.\sin(\omega t)$



Ne pas représenter le signal sur l'axe des Y mais sur le cercle trigonométrique.

Étude du cercle trigonométrique



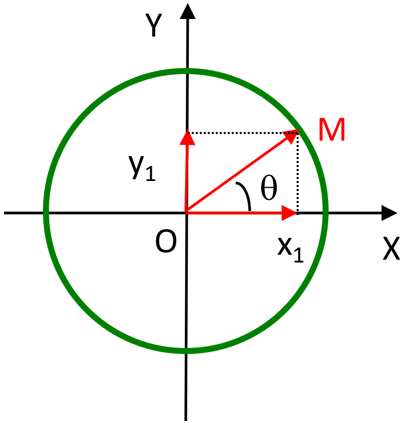
Comment définir un point M sur le cercle ??
Plusieurs écritures:

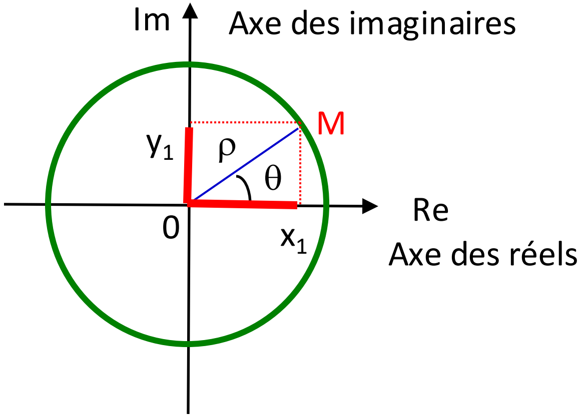
- Coordonnées polaires : $M = \rho e^{i\theta}$ avec $\omega t = \theta$ et $A = \rho$
- Projection de M sur l'axe des X et l'axe des Y

Projection sur Y: $y_1 = \rho.\sin(\omega t) = \rho.\sin(\theta)$

Projection sur X: $x_1 = \rho.\cos(\omega t) = \rho.\cos(\theta)$

Autres représentations





Analyse avec des vecteurs :
Source d'inspiration pour
représentation de Fresnel

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Ox_1} + \overrightarrow{Oy_1}$$

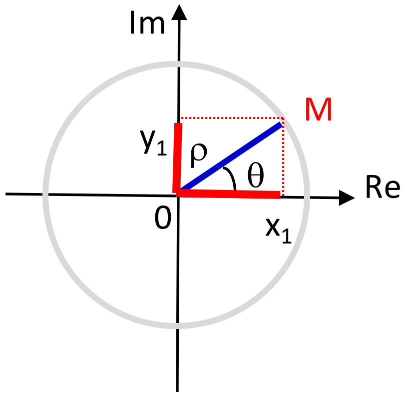
$$\theta = \omega t$$

On introduit une nouvelle représentation:
Le plan complexe

$M = x_1 + i.y_1$ pour les mathématiciens
$M = x_1 + j.y_1$ pour les physiciens

i et j précisent qu'il s'agit de l'axe des imaginaires

Intérêt de ces représentations



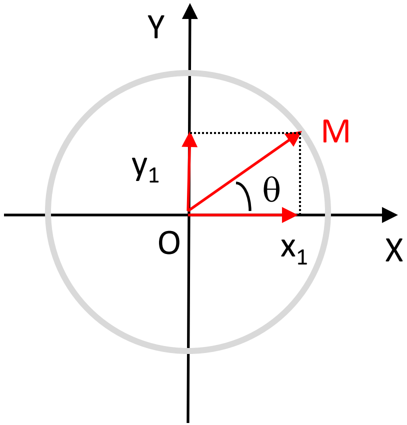
Nous pourrons nous affranchir d'utiliser des sin(ωt)
À tout moment, nous pouvons retrouver : $y_1 = \rho.\sin(\theta)$ et $x_1 = \rho.\cos(\theta)$

car M (ou $\overrightarrow{OM}$) véhicule deux informations:

1) Sa « longueur » appelée module d'après Pythagore

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{Ox_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{Oy_1}\right\|^2$$

pour simplifier $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2$ soit $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$



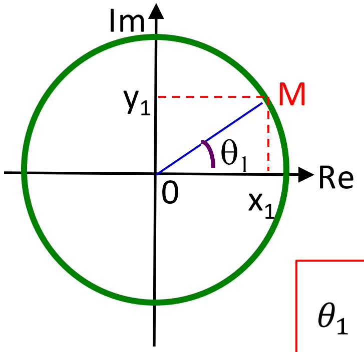
2) Son déphasage par rapport à l'axe des X (réels) appelé argument

$$\sin(\theta) = \frac{y_1}{\rho} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad \cos(\theta) = \frac{x_1}{\rho} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{Im}{Re} \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right) = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right)$$ Pas tout à fait

Calcul de l'argument: 4 cas sont analysés

1) Si θ_1 se situe dans le premier quadrant

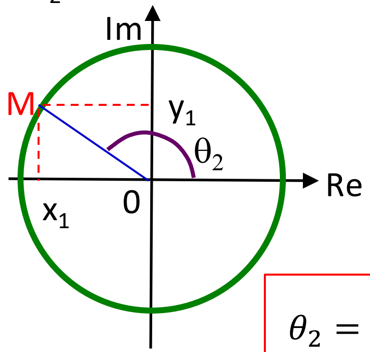


Im > 0

Re > 0

$$\theta_1 = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

2) Si θ_2 se situe dans le second quadrant

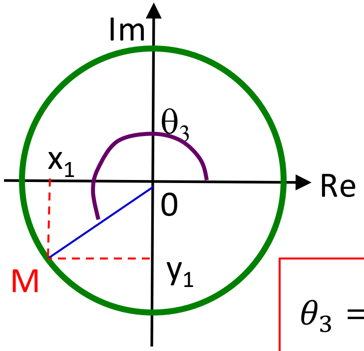


Im > 0

Re < 0

$$\theta_2 = \pi + arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = \pi - arctg\left(\left|\frac{Im}{Re}\right|\right)$$

3) Si θ_3 se situe dans le troisième quadrant

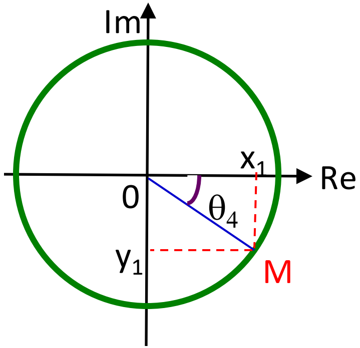


Im < 0

Re < 0

$$\theta_3 = \pi + arctg\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

4) Si θ_4 se situe dans le quatrième quadrant

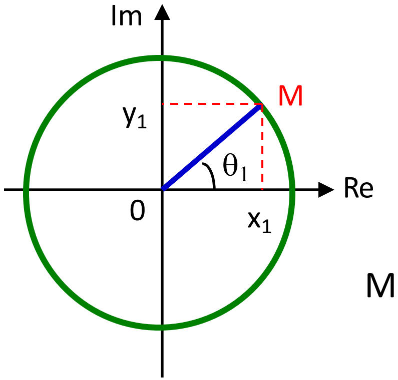


Im < 0

Re > 0

$$\theta_4 = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = -arctg\left|\frac{Im}{Re}\right|$$

Autres propriétés des nombres complexes [1]

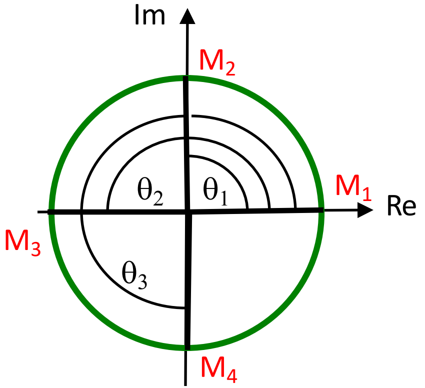


$M = x_1 + j.y_1$

ou

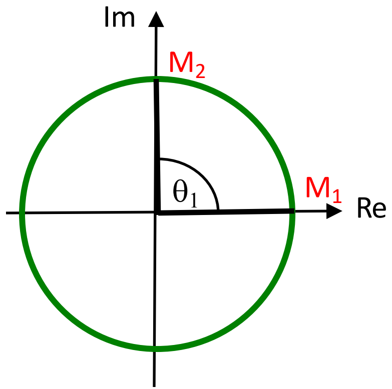
$M = \rho.\cos(\theta_1) + j.\ \rho.\sin(\theta_1)$

Considérons les trois déphasages θ_1, θ_2, θ_3, ci-contre



$M_1 = \rho.\cos(0) + j.\ \rho.\sin(0)$

ou $M_1 = \rho.\cos(0) = \rho$



1) Passer de M_1 à M_2: $M_2 = \rho.\cos(\pi/2) + j.\rho.\sin(\pi/2)$

$M_2 = j.\rho.\sin(\pi/2)$, soit $M_2 = j.\rho$ ou encore $M_2 = j.M_1$

Conséquence 1: Ajouter un déphasage de $\pi/2$ à un nombre M revient à "*multiplier M par j*"

Autres propriétés des nombres complexes [2]

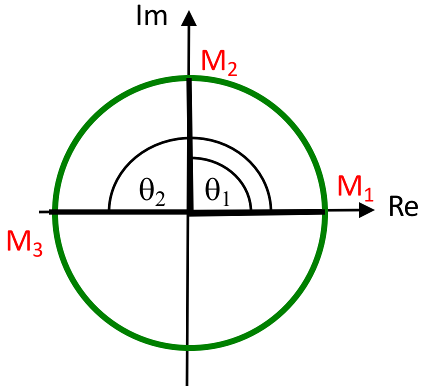
2) Passer de M_1 à M_3: $M_3 = \rho.\cos(\pi) + j.\rho.\sin(\pi)$,

$M_3 = \rho.\cos(\pi) = -\rho = -M_1$, soit $M_3 = -M_1$

conséquence 2.a: ajouter un déphasage de π à un nombre M revient à "*multiplier M par -1*"

Pour passer de M_2 à M_3 on a aussi: $M_3 = j.M_2 = j^2.M_1$

conséquence 2.b: $\boxed{j^2 = -1}$



3) Passer de M_1 à M_4: $M_4 = \rho.\cos(3\pi/2) + j.\rho.\sin(3\pi/2)$,

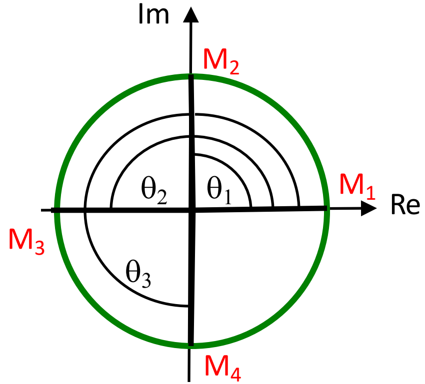
$M_4 = j.\rho.\sin(3\pi/2) = -j.\rho = -j.M_1$, soit $M_4 = -j.M_1$

conséquence 3.a: ajouter un déphasage de $3\pi/2$ à un nombre M revient à "*multiplier M par -j*"

Pour passer de M_3 à M_4 on a aussi: $M_4 = j.M_3 = j^2.M_2 = j^3.M_1$

conséquence 3.b: $\boxed{j^3 = -j}$

conséquence 4: $-j = -j*j/j = 1/j$ et $j^4 = j^3*j = -j*j = -(-1) = 1$



Notion d'impédance complexe

Avec R nous avons vu que:

$$u_S(t) = R.I_0.\sin(\omega t) = U_0.\sin(\omega t)$$

$$i(t) = I_0.\sin(\omega t)$$

Avec C nous avons vu que:

$$u_S(t) = \frac{I_0}{\omega C}.\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Idéalement: il faudrait avoir la forme **K.sinωt** pour travailler avec R et C **sans se préoccuper du déphasage**.

Question: Comment transformer $M_1 = K_1.\sin(\omega t - \pi/2)$ en $K_2.\sin(\omega t)$????

Solution: $K_1.\sin(\omega t - \pi/2) = K_2.\sin(\omega t)$

Nous avons vu qu'il fallait multiplier par $j^3 = -j$, donc $M_1 = K_1.\sin(\omega t - \pi/2) = -j.K_1.\sin(\omega t)$

Application avec C: $u_S(t) = \frac{I_0}{\omega C}.\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -j\frac{I_0}{\omega C}.\sin(\omega t) = \frac{I_0}{j\omega C}.\sin(\omega t)$

Comparons R, C et L pour $i(t) = I_0.\sin(\omega t)$

- avec R: $u_s(t) = R.i(t)$
- avec C: $u_s(t) = R_C.i(t) = \underline{Z}_C.i(t)$ → $\underline{u}_S = \underline{Z}_C.\underline{i}$ où $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ (Impédance complexe)
- avec L: $u_s(t) = R_L.i(t) = \underline{Z}_L.i(t)$ → $\underline{u}_S = \underline{Z}_L.\underline{i}$ où $\underline{Z}_L = j\omega L$ (Impédance complexe)

Écriture impropre

Petite parenthèse calcul module et argument

Coordonnées polaires adaptées pour calcul de produit et de rapport

$$M_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \qquad\qquad M_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

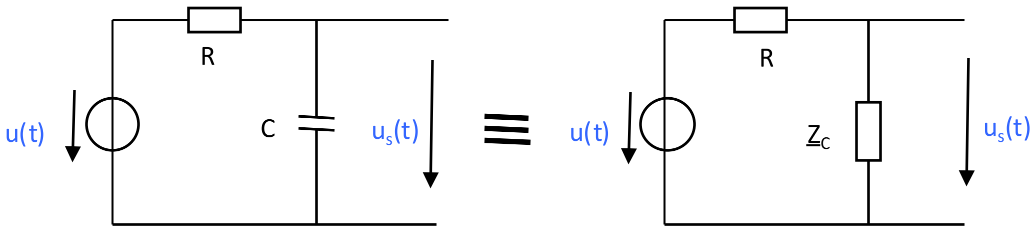
Produit de deux expressions complexes

$$M_1 . M_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} . \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 . \rho_2 . e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Rapport de deux expressions complexes

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Application aux circuits



Calcul de $\frac{u_S(t)}{u(t)}$ ou plutôt de $\frac{\underline{u}_S}{\underline{u}}$

$$\frac{\underline{u}_S}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \boxed{\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \underline{H}(j\omega)$$

Ne pas laisser sous cette forme

Ce rapport est appelé FONCTION DE TRANSFERT.

C'est une expression complexe dont on peut calculer le module $|\underline{H}(j\omega)|$ et l'argument $\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega))$

Module d'un produit = Produit des modules

Module d'un rapport = Rapport des modules

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Argument d'un produit = Somme des arguments

Argument d'un rapport = différence des arguments

$$\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\mathrm{arctg}(\omega RC)$$

Filtre passe-bas

La fonction de transfert calculée précédemment correspond à un filtre passe-bas

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}}$$

Observations du module

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}$$

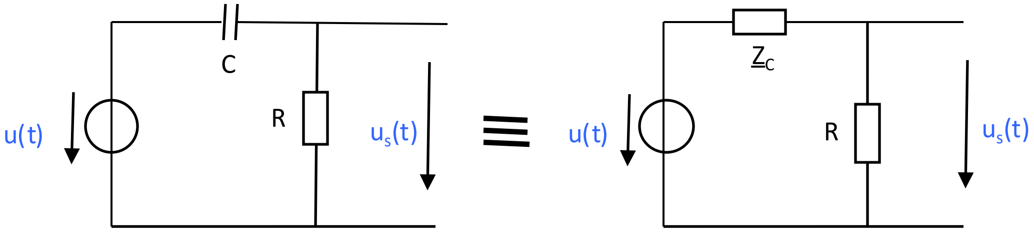
- si ω --> 0 alors $|\underline{H}(j\omega)|$ --> 1 (pas d'atténuation)
- si ω --> ∞ alors $|\underline{H}(j\omega)|$ --> 0 (Atténuation complète)

Observations de l'argument

$$\boxed{\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\ \mathrm{arctg}(\omega RC)}$$

- si ω --> 0 alors $\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\ \mathrm{arctg}(\omega RC) = 0$
- si ω --> ∞ alors $\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\ \mathrm{arctg}(\omega RC) = -\pi/2$

Filtre passe-haut



$$\frac{\underline{u_S}}{\underline{u}} = \frac{R}{R + \underline{Z_C}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \underline{H}(j\omega)$$

R et C sont permutées

Calcul de $\underline{H}(j\omega)$ = $\underline{u_s}/\underline{u}$

La fonction de transfert est celle d'un filtre passe-haut

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}}$$

Observations du module

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}$$

- si ω --> 0 alors |H(jω)| --> 0 (Atténuation complète)
- si ω --> ∞ alors |H(jω)| --> 1 (pas d'atténuation)

Observations de l'argument

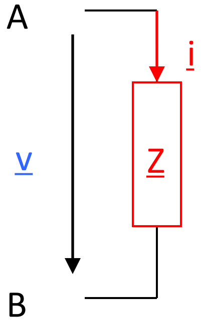
$$\boxed{\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\omega RC)}$$

- si ω --> 0 alors Arg(H(jω)) = $\pi/2$
- si ω --> ∞ alors Arg(H(jω)) = $\pi/2 - \pi/2 = 0$

Les composants de base

Application aux signaux sinusoïdaux

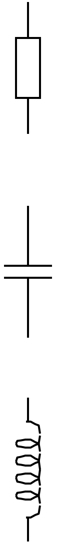
Composant passif quelconque



$\underline{v} = f_1(\underline{i})$

$\underline{i} = f_2(\underline{v})$

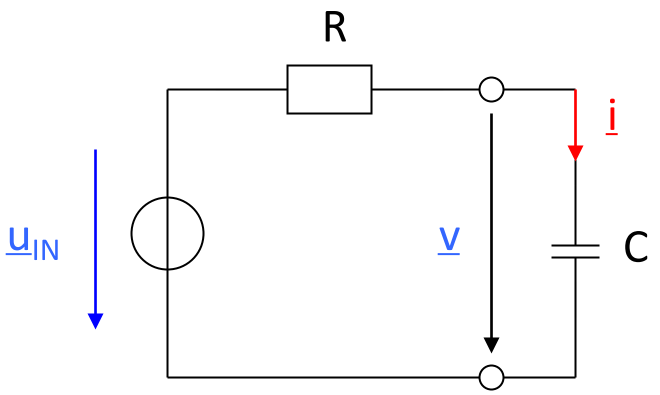
Composants R, L, C



	$\underline{v}$	$\underline{i}$
R	$R.\underline{i}$	$\dfrac{\underline{v}}{R}$
C	$\dfrac{1}{j\omega C}\underline{i}$	$\underline{v}\, j\omega C$
L	$j\omega L\underline{i}$	$\dfrac{1}{j\omega L}\underline{v}$

Cas particulier

Circuit RC et signaux sinusoïdaux



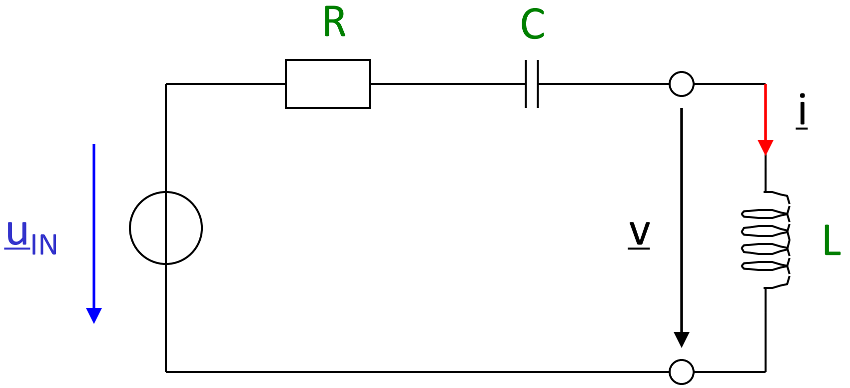
Même démarche (Kirchhoff) que dans la dia 4

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_{IN} - \underline{v}}{R} = \underline{v}.j\omega C \Rightarrow \frac{\underline{u}_{IN}}{R} = \frac{\underline{v}}{R} + \underline{v}.j\omega C = \underline{v}\left(\frac{1 + j\omega RC}{R}\right) \Rightarrow \underline{v} = \underline{u}_{IN}.\frac{1}{1 + j\omega RC}$$

! *Se référer au cours sur les diagrammes de Bode pour l 'analyse*

Cas particulier

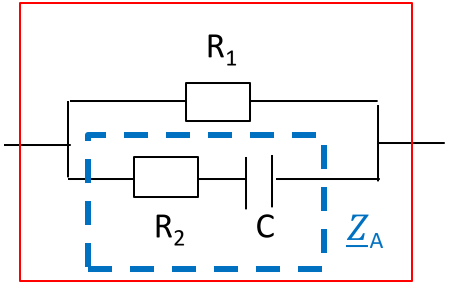
Circuit RLC et signaux sinusoïdaux



$$\underline{u}_{IN} = R\underline{i} + \frac{\underline{i}}{j\omega C} + j\omega L\underline{i}$$

$$\underline{v} = \underline{u}_{IN}.\frac{j\omega L}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \underline{u}_{IN}.\frac{(j\omega)^2 LC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

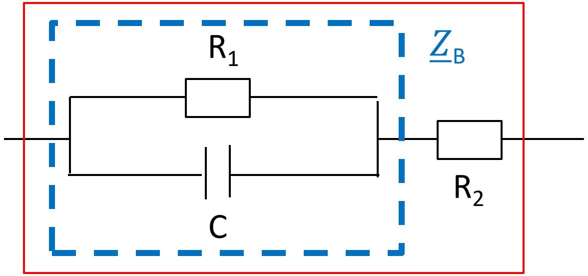
Exemples d'application: Calcul d'impédances équivalentes



$\underline{Z}_{EQ1}$

$$\underline{Z}_{A} = R_2 + Z_C = R_2 + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{EQ1} = \frac{R_1 . \underline{Z}_A}{R_1 + \underline{Z}_A} = \frac{R_1 . \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}} = \frac{R_1 . (1 + j\omega R_2 C)}{j\omega C R_1 + 1 + j\omega R_2 C} = \frac{R_1 . (1 + j\omega R_2 C)}{1 + j\omega C (R_1 + R_2)}$$



$\underline{Z}_{EQ2}$

$$\underline{Z}_{B} = \frac{R_1 . \underline{Z}_C}{R_1 + \underline{Z}_C} = \frac{R_1 . \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}$$

$$\underline{Z}_{EQ2} = \underline{Z}_B + R_2 = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + R = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + \frac{R_2 (1 + j\omega R_1 C)}{1 + j\omega R_1 C}$$

$$\underline{Z}_{EQ2} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{1 + j\omega R_1 C} = (R_1 + R_2) . \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}{1 + j\omega R_1 C}$$